

## Probleme de optimizare combinatorială în clase particulare de grafuri și aplicații

### Rezumat

Consider că valoarea contribuțiilor este determinată de: introducerea unor noi concepte, mai ales cea de descompunere quasi-slabă; rezolvarea conjecturii grafurilor normale pe clase particulare de grafuri; rezolvarea problemei biseției (o problema NP-completă) pe clase particulare de grafuri; rezolvarea unor probleme algoritmice în conexiune cu biclicile unor grafuri; determinarea partiției mirror pentru anumite clase particulare de grafuri; rezolvarea unor probleme algoritmice în conexiune cu biclicile unor grafuri; proiectarea unor algoritmi de recunoaștere și de optimizare combinatorie pe anumite clase particulare de grafuri (comparabili cu cei existenți); proiectarea unor algoritmi hibridi pentru rezolvarea unor probleme NP-dificile; aplicații ale unor clase particulare de grafuri în chimie și în probleme de optimizare.

Rezolvarea de probleme dificile pe structuri speciale de grafuri constituie primul capitol a căror rezultate le prezentăm, pe scurt, în continuare.

Securitatea în rețelele de comunicații ia în considerare un nou tip de conexiune în grafuri, conexiunea confidențială. Stabilim relația între grafurile unbreakable și cele confidențial conexe, prezentăm o caracterizare a grafurilor unbreakable, dăm un algoritm de recunoaștere pentru aceste grafuri și dăm câteva aplicații ale lor în chimie și în probleme de optimizare.

Verificăm conjectura normală pentru clasa de O-grafuri și dăm un algoritm de recunoaștere pentru O-grafuri.

Grafurile polare sunt o extensie naturală a grafurilor bipartite, a complementarului și a grafurilor split. Recunoașterea unui graf polar este NP-completă; algoritmi polinomiali pentru problema stabilei maxime sunt necunoscuți, problema mulțimii dominante este NP-completă. Caracterizăm grafurile polare, dăm un algoritm polinomial pentru recunoașterea lor care sunt și trivial perfecte și calculăm direct numărul de dominație, dăm algoritmi polinomiali pentru numărul de stabilitate și numărul clică, dăm câteva aplicații în probleme de locație.

Reamintim unele rezultate despre grafurile diamond-free, care sunt și prime. O întrebare se pune: ce proprietăți au grafurile diamond-free, dar care nu sunt prime. Dăm un algoritm de recunoaștere pentru grafurile diamond-free, care păstrează structura combinatorie a grafului, prin intermediul descompunerii slabe, precum și o posibilitate de a determina numărul clică pentru grafurile diamond-free.

Unele probleme de optimizare NP-complete sunt rezolvate eficient pe clasa grafurilor weak-bisplit. Noi dăm condiții necesare și suficiente pentru ca un graf să fie weak-bisplit cograf, dăm un  $O(n(n+m))$  algoritm pentru a determina densitatea și calculăm direct numărul de dominație.

Dacă  $M$  este clasa grafurilor dublu cordale, ereditar dual cordale și tare cordale atunci  $G$  este din  $M$  dacă și numai dacă  $N$  este clică și  $G(V-R)$  și  $G(R)$  sunt de același tip cu  $G$ . Prezentăm algoritmi de recunoaștere, de construcție a unei mulțimi stabile și a unei clici de cardinal maxim.

Rezultatele din capitolul “Clase de grafuri, complexitatea de probleme și algoritmi” fac obiectul unui proiect de cooperare bilaterală între Academia Română (Universitatea “Vasile Alecsandri” din Bacău fiind partener) și Academia Națională de Științe din Belarus și Fundația Republicană pentru Cercetări Fundamentale din Belarus (Institutul de Matematică al Academiei Naționale de Științe din Belarus fiind partener). Ele se concretizează în: 1) Determinarea spectrului Laplacian pe clase particulare de grafuri și aplicații; 2) Determinarea polinomului Wiener, indicelui Wiener și a unor indici de centralitate pentru niște clase de grafuri; 3) Rezolvarea unor probleme de recunoaștere și de optimizare combinatorială pe clase particulare de grafuri; proiectarea de algoritmi combinatoriali și euristici; 4) Investigarea problemei biseției; 5) Verificarea Conjecturii Normale a grafurilor pe clase particulare de grafuri; 6) Rezolvarea unor probleme algoritmice în conexiune cu biclicile unor grafuri; 7) Investigarea unor aplicații ale grafurilor geometrice în rețele wireless, GIS.

În continuare prezentăm succint rezultatele din cele șapte subcapitole.

I) Algoritmi de recunoaștere și de optimizare combinatorială pentru grafuri lanț bipartite

Dăm o caracterizare a grafurilor bipartite chain, dăm o descompunere a lor în 4 mulțimi stabile (mulțimea vârfurilor sale era cunoscută a fi partiționată într-o mulțime stabilă și un graf bipartit complet), un algoritm de recunoaștere în  $O(n(n+m))$  timp și calculăm direct densitatea pentru astfel de grafuri. Pentru numărul de stabilitate și numărul de dominație, dăm algoritmi comparabili din punct de vedere al timpului de execuție cu cei existenți. Punctăm niște aplicații ale grafurilor bipartite chain în chimie.

II) Probleme de optimizare pe grafuri threshold

Grafurile threshold au un rol important în teoria grafurilor precum: problema ”set-packing”, procesarea paralelă, probleme de locație. În această secțiune caracterizăm grafurile threshold,

determinăm: densitatea, numărul de stabilitate, precum și indicii de centralitate, indicele și polinomul Wiener.

III) Probleme de optimizare în grafuri diamond-free utilizând descompunerea quasi-slabă

În ultimul timp, diferite tipuri de descompuneri au fost utilizate în teoria grafurilor. În variate probleme din teoria grafurilor, de exemplu în construirea unor algoritmi de recunoaștere, frecvent apare așa numita descompunere slabă a grafurilor. În acest subcapitol *introducem noțiunea de descompunere quasi-slabă* a unui graf  $G$ , arătăm existența unei astfel de descompuneri, depinzând de existența descompunerii slabe, dăm un algoritm polinomial de determinare a numărului clică pentru grafurile diamond-free.

IV) Despre grafuri confidențial conex-free și asteroidal triple-free

Acest subcapitol se ocupă cu unele rezultate privind relația între clasa grafurilor *confidențial conex-free* și clasa grafurilor *asteroidal triple-free*. Noi dăm o caracterizare a grafurilor *confidențial conex-free* utilizând vecinătățile și descompunerea slabă. De asemenea, dăm niște rezultate referitoare la spectrul Laplacian a grafurilor minimal unbreakable.

V) Un algoritm de recunoaștere și niște probleme de optimizare pe clasa grafurilor weakly quasi-threshold

În acest subcapitol caracterizăm grafurile weakly quasi-threshold utilizând descompunerea slabă, determinăm densitatea și numărul de stabilitate pentru grafurile weakly quasi-threshold.

VI) Determinarea mulțimilor optimal eficiente în clase particulare de grafuri

Acest subcapitol este motivat deoarece există numai algoritmi polinomiali în timp pentru a găsi o mulțime optimal eficientă într-un graf arbitrar. Determinăm direct mulțimile optimal eficiente în clasa grafurilor confidențial conex și clasa grafurilor unbreakable. De asemenea, determinăm direct mulțimea iredundant deschisă, mulțimea vecinătate închisă, influența unei mulțimi pe clasa grafurilor confidențial conex și a grafurilor unbreakable.

VII) Despre grafuri net-free și claw-free

În acest subcapitol dăm o caracterizare a grafurilor net-free și claw-free, dăm un algoritm de recunoaștere pentru grafurile net-free, un  $O(n(n + m))$  algoritm pentru determinarea unui cuplaj maxim în grafurile claw-free, comparabil cu algoritmi existenți în termenii de complexitate, dar utilizând descompunerea slabă.

VIII) Investigarea problemei bisecției

Caracterizăm grafurile threshold, dăm un algoritm de recunoaștere pentru această clasă de grafuri și un algoritm pentru problema biseției în grafuri threshold.

#### IX) Verificarea the Normal Graph Conjecture pe clase particulare de of grafuri

Un graf este *normal* dacă există o pereche de familii de mulțimi care se intersectează în care una din familii este formată din cliци în timp ce cealaltă constă din mulțimi stabile și în care fiecare vârf este obținut din una din aceste intersecții. Este cunoscut că grafurile perfecte sunt normale.

Korner și de Simone observă că  $C_5$ ,  $C_7$  și  $\overline{C}_7$  sunt minimale nenormale și presupun, ca o generalizare a coniecturii tari a grafurilor perfecte, că fiecare graf  $(C_5, C_7; \overline{C}_7)$ -free este normal (Normal Graph Conjecture). În acest capitol verificăm coniectura pentru clasa grafurilor minimal Asteroidal Triple.

#### X) Probleme algoritmice în legatură cu biclicile în grafuri

Teoria grafurilor oferă algoritmi și instrumente pentru modele importante aplicate în biologie și medicină, astfel ca diagnosticarea. Acest capitol conduce la niște rezultate teoretice despre relația dintre clasa de grafuri chair-free și bull-free, care sunt susceptibile la aplicații în medicină și sisteme inteligente. Dăm o caracterizare a grafurilor chair-free și bull-free, dăm, de asemenea, algoritmi de recunoaștere pentru grafurile *chair, bull*-free, comparabili cu cei existenți din punct de vedere al timpului de execuție și determinăm numere de optimizare combinatorială în timp eficient. De asemenea, arătăm existența unei partiții biclică.

#### XI) Investigarea unor aplicații ale grafurilor geometrice în graphics, wireless networks, GIS, computer vision

Dăm o caracterizare și algoritmi de recunoaștere pentru grafurile *murky* și *unbreakable*. Dacă  $G$  este un graf minimal unbreakable cu cel puțin opt vârfuri atunci  $G$  sau  $\overline{G}$  este un ciclu Hamiltonian. Construim un graf geometric corespunzând unui ciclu Hamiltonian și arătăm aplicațiile sale în rețele wireless.

În capitolul “Descompuneri de grafuri și rezolvarea de probleme de optimizare discretă” prezentăm rezultate care fac obiectul proiectului “Decomposition of graphs and solving discrete optimization problems” în cooperarea bilaterală cu Belarus din perioada 2014-2015.

Unele rezultate sunt: 1) Probleme referitoare la definirea de noi proprietăți ale grafurilor triangulate, proiectarea de noi algoritmi eficienți pentru determinarea de numere combinatoriale; 2) Investigarea unor condiții necesare și suficiente pentru ca un graf să fie CAN-free și proiectarea de noi algoritmi eficienți de recunoaștere; 3) Rezolvarea în timp polinomial a unor

probleme pe clase particulare de grafuri triangulate cu  $M$ -partiție; 4) Demonstrarea incluziunii între grafurile triangulate și generalizări ale lor; 5) Demonstrarea unor proprietăți ale quasi-clicilor (numite și hiper-clici).

Ele se concretizează în următoarele.

#### I) Recunoașterea rapidă a grafurilor chair-free

Noi dăm o caracterizare a grafurilor *chair-free* utilizând descompunerea slabă; de asemenea, dăm algoritmi de recunoaștere pentru grafuri  $P_4$ -reducibile, comparabili cu cei existenți din punct de vedere al execuției și determinăm numere de optimizare combinatorială în timp eficient (problema mulțimii stabile maxime (ponderate) (M(W)S) este NP-completă în general). Construim o partiție biclică pentru grafuri  $P_4$ -reducibile.

#### II) Algoritmi de recunoaștere și determinarea partiției mirror pentru grafuri murky și unbreakable

Pentru grafurile unbreakable și murky, partiția mirror este dată utilizând descompunerea slabă.

#### III) Despre grafuri {claw,antenna,net}-free

În acest subcapitol dăm o caracterizare a grafurilor {claw,antenna,net}-free, utilizând descompunerea slabă. De asemenea, dăm un algoritm de recunoaștere pentru grafurile {claw,antenna,net}-free.

#### IV) Determinarea eficientă de partiții biclică și aplicațiile lor în evaluarea riscurilor de securitate a rețelei

În acest subcapitol vom evidenția relația dintre grafurile attack, asociații cruce și partiții biclică. De asemenea, vom da un algoritm de recunoaștere eficient pentru o subclasă maximală de cografuri, vom da condițiile necesare și suficiente pentru existența unei partiții biclică (problema partiției biclică este NP-completă) și vom determina unele numere de optimizare combinatorii pentru anumite clase de grafuri (subclase maxime pentru grafuri  $P_4$ -free) în timp eficient.

#### V) Algoritmi de optimizare combinatorială pentru grafuri $P_4$ -sparse

Dăm o caracterizare a grafurilor  $P_4$ -sparse utilizând descompunerea slabă. Dăm, de asemenea, algoritmi de recunoaștere pentru grafurile  $P_4$ -sparse și determinăm numere de optimizare combinatorială în timp eficient.

#### VI) Algoritmi rapizi pe grafuri duale

Noi dăm o caracterizare a grafurilor dual ereditare, dăm un algoritm de recunoaștere și determinăm numere de optimizare combinatoriale în timp eficient.

#### VII) Despre grafuri dublu cordale

Dăm o caracterizare a grafurilor dublu cordale, dăm un algoritm de recunoaștere și determinăm numere de optimizare combinatorială în timp eficient.

#### VIII) Algoritmi rapizi pe grafuri putere-cordale și tari cordale

Dăm o caracterizare a grafurilor putere-cordale și tari cordale, dăm un algoritm de recunoaștere și determinăm numere de optimizare combinatorială în timp eficient.

#### IX) Grafuri hyper-cordale

Dăm o caracterizare a grafurilor hiper-cordale utilizând o ordine a vârfurilor și descompunerea slabă, dăm un algoritm de recunoaștere și stabilim incluziunea dintre diferitele generalizări ale grafurilor cordale.

Primul proiect propus pentru dezvoltarea ulterioară se numește “Proprietăți structurale și complexitatea algoritmică a unor probleme de teoria grafurilor”.

Ideea științifică a autorilor este o investigare a problemelor în grafuri care îndeplinesc anumite proprietăți de regularitate, prin tehnici de descompunere și combinatorii.

În contextul dezvoltării de noi algoritmi eficienți, vom rafina limita dintre timp polinomial și NP-completitudine pentru problemele pe grafurile luate în considerare. Algoritmii pe care îi vom dezvolta, vor duce la extinderea zonei de calculabilitate tractabilă pentru problemele investigate.

Ne propunem următoarele rezultate: Noi clase de grafuri, pentru care problemele de acoperire, de partiție pot fi rezolvate în timp polinomial; Noi proprietăți spectrale ale unor clase de grafuri; Relațiile dintre proprietățile spectrale și structurale ale claselor de grafuri; Algoritmi exacti noi și complexitatea lor computațională în clase particulare de grafuri; Noi algoritmi hibridi pentru unele probleme de grafuri; Determinarea unor indici de centralitate și din chimie.

Rezultatele pot găsi aplicabilitate practică în sarcinile de proiectare VLSI, transfer de informații și de recunoaștere a formelor.

Una dintre direcțiile în cercetările planificate este analiza structurii grafului în probleme de optimizare pe grafuri. Problemele de optimizare cer valorile optime ale parametrilor pe grafuri în diferite condiții. Cercetarea urmărește să găsească configurațiile sau proprietățile prezente într-un graf care fac valorile parametrilor să fie optime. Odată ce grafurile dintr-o clasă sunt recunoscute (folosind o metodă de descompunere), putem cu siguranță să abordăm probleme de optimizare combinatorie, precum și aplicații în diverse domenii.

Pentru rezolvarea problemelor pe care le vom lua în considerare, presupunem metode combinatorial-geometrice și de descompunere care nu au fost utilizate. Prin urmare, aceste probleme sunt deschise.

A doua direcție de dezvoltare am propus să fie un proiect cu numele “Structuri matematice discrete în elaborarea metodelor și algoritmilor pentru soluționarea problemelor aplicative cu caracter socio-economic”.

Obiectivul proiectului constă în realizarea de studii și cercetări cu privire la aplicații ale modelelor matematice discrete, a teoriei grafurilor și a metologiilor ingineriei software pentru optimizarea activităților economico-sociale. Existența problemelor NP-complete implică necesitatea dezvoltării unui set de algoritmi eficienți, de complexitate polinomială, care să contribuie semnificativ la eficientizarea activității economice. Se va proceda la analiza modelelor matematice discrete, cu precădere orientate către probleme decizionale aplicative din domeniile economiei, ecologiei, tehnicii de calcul și sistemelor de comunicații. Aceste modele sunt relaționate cu utilizarea algoritmilor exacti în clase particulare de grafuri, utilizarea algoritmilor euristici, precum și determinarea spectrului Laplacian pentru clase particulare de grafuri. Testarea și validarea modelelor se va realiza prin proceduri specifice ingineriei software, astfel încât să se determine corespondența între aparatul conceptual și practica dezvoltării aplicațiilor informatice. Următoarele rezultate (care constituie și etapele de realizare a proiectului) le propunem a fi obținute: Prezentarea stadiului actual al cercetărilor privind problemele actuale deschise, importante în diferite clase de grafuri, cu evidențierea aplicabilității în diferite arii ale domeniului socio-economic; Elaborarea de algoritmi exacti în clase particulare de grafuri, cu enumerarea aplicațiilor concrete ale acestora; Elaborarea de algoritmi eficienți pentru problemele rezolvate în etapa anterioară, cu aplicabilitate în sfera euristiciilor și metaeuristiciilor, determinarea spectrului Laplacian pentru clase particulare de grafuri; Testarea algoritmilor dezvoltați pentru diferite probleme din mediul socio-economic.

Odată ce grafurile dintr-o clasă sunt recunoscute, putem să abordăm probleme de optimizare combinatorie, precum și aplicații în diverse domenii. Pentru rezolvarea problemelor pe care le vom lua în considerare, presupunem metode combinatorii și de descompunere care nu au fost utilizate. Prin urmare, aceste probleme sunt deschise.